Métodos para calcular el VaR

Fundamentos estadísticos para calcular el VaR.

Existen diversos conocimientos estadísticos que son necesarios para calcular el Valor en Riesgo (VaR), y son:

- Rendimientos logarítmicos,
- Media, Varianza, Volatilidad, covarianza y correlación de los factores de riesgo.
- Matrices de varianza-covarianza y correlación.
- Distribución de probabilidad normal.

Rendimiento y riesgo

En la teoría financiera existen dos variables básicas que se deben entender y calcular para tomar decisiones de inversión:

- Rendimiento y Riesgo

La teoría indica que a mayor rendimiento, mayor riesgo.

Rendimiento de los factores de riesgo

Consideremos que se tienen "n" observaciones de un determinado factor de riesgo dadas por $\{FR_1, \mathrm{FR}_2,...,\mathrm{FR}_n\}$, para un período histórico de tiempo. Lo más común es tener observaciones diarias, mismas que se pueden obtener del mercado (Reuters, Infosel, etc.) o de los proveedores de precios (PIP o Valmer).

El rendimiento de un determinado factor de riesgo puede ser discreto o continuo:

Rendimiento discreto:

$$R_i = \left(\frac{FR_i}{FR_{i-1}} - 1 \right), \qquad \text{i=1,…n}$$

Rendimiento continúo:

$$R_i = \ln\left(\frac{FR_i}{FR_{i-1}} \right), \qquad \text{i= 2,…,n}$$

Dónde:

R_i Es el rendimiento del i-esimo día, de un determinado factor de riesgo.

$\ln$ Es la función logaritmo natural

FR_i Es el dato del i-esimo día observado del factor de riesgo.

FR_{i-1} Es el dato del día anterior observado del factor de riesgo.

En el siguiente ejemplo se utilizan las primeras 10 observaciones que tuvo el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores, para calcular el rendimiento continuo y discreto al inicio del mes de mayo del 2005.

Fecha	IPC	Ri continuo	Ri discreto
02/05/2005	12,424.95		
03/05/2005	12,357.88	-0.5413%	-0.5398%
04/05/2005	12,643.04	2.2813%	2.3075%
05/05/2005	12,619.91	-0.1831%	-0.1829%
06/05/2005	12,615.83	-0.0323%	-0.0323%
09/05/2005	12,563.02	-0.4195%	-0.4186%
10/05/2005	12,497.43	-0.5235%	-0.5221%
11/05/2005	12,464.84	-0.2611%	-0.2608%
12/05/2005	12,448.73	-0.1293%	-0.1292%
13/05/2005	12,347.72	-0.8147%	-0.8114%

Fuente: valores del IPC al cierre de Reuters y tabla propia.

En este caso el factor de riesgo (FR) es el IPC

En la teoría de productos derivados y administración de riesgos lo común es utilizar los rendimientos continuos, por lo que de aquí en adelante utilizaremos estos rendimientos.

Media de rendimientos del factor de riesgo

Una vez calculados los rendimientos históricos del factor de riesgo, es necesario utilizar otra medida estadística llamada media la cual forma parte de un grupo de medidas de tendencia central o promedio. El promedio de los rendimientos del factor de riesgo es una cifra única que representa a un grupo de de "N=n-1" rendimientos.

El promedio ó media está dado por:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_i}{N},$$

La función de Excel que permite calcular el promedio es:

=PROMEDIO($R_1, R_2, .., R_N$)

Dónde: $\overline{R}$ es la media de los "N" rendimientos del factor de riesgo.

$R_1, R_2, .., R_N$ son los "N" rendimientos del factor de riesgo.

Ejemplo: ver archivo en Excel.

Varianza de rendimientos del factor de riesgo

Es un método estadístico de dispersión, el cual mide el grado de dispersión de los rendimientos respecto a su media.

La varianza está dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(R_i - \overline{R}\right)^2}{N-1}$$

La función de Excel que permite calcular la varianza es:

=VAR($R_1, R_2, .., R_N$)

En el mercado financiero, los investigadores y diferentes autores han demostrado que es mejor considerar para el cálculo de la varianza, una media igual a cero, es decir:

Cuando $\overline{R}$ = 0, la expresión anterior es por lo tanto

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_i^2}{N-1}$$

Volatilidad

Es un indicador fundamental para la cuantificación de riesgos de mercado porque representa una medida de dispersión de los rendimientos con respecto al promedio o a la media de los mismos en un periodo determinado. Es un indicador de que tan nerviosos están los mercados financieros.

La volatilidad diaria de los rendimientos de cualquier factor de riesgos es:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(R_i - \overline{R}\right)^2}{N - 1}}$$

La función de Excel que permite calcular la volatilidad es:

=DESVEST($R_1, R_2, .., R_N$)

Cuando $\overline{R}$ = 0, la expresión para la volatilidad histórica, está dada por:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} R_i^2}{n - 1}}$$

La fórmula para calcular la volatilidad anual, es la recomendada por el Banco Internacional de liquidaciónes (RIC):

$$\sigma_A = \sigma_D * \sqrt{252}$$

Si lo que interesa es la volatilidad con un horizonte de inversión de "H" días, su cálculo es.

$$\sigma_H = \sigma_D * \sqrt{H}$$

Los sistemas electrónicos de información (Bloomberg, Reuters, etc.) proporcionan la volatilidad anual de diferentes subyacentes y para el cálculo del Valor en Riesgo (VaR), se necesita la diaria, su cálculo es.

$$\sigma_D = \sigma_A * \sqrt{\frac{1}{252}}$$

Dónde:

σ_D es la volatilidad diaria que presentan los rendimientos del FR.

252 representa los días hábiles del sistema financiero.

En resumen, existen diferentes técnicas para calcular la volatilidad y son:

- Volatilidad histórica.
- Volatilidad dinámica o con suavizamiento exponencial.
- Volatilidad implícita.
- Modelos de series de tiempo (ARCH y GARCH)

Covarianza de dos factores de riesgo

Es una medida de asociación lineal entre dos factores de riesgo y describe el movimiento conjunto entre estos.

Sean $FR^1 = \{FR^1{}_1, FR^1{}_2, ..., FR^1{}_n\}$ Y $FR^2 = \{FR^2{}_1, FR^2{}_2, ..., FR^2{}_n\}$ las observaciones históricas de los dos factores de riesgo.

El procedimiento para calcular la covarianza es:

1.- Calcular los rendimientos de cada uno de los factores de riesgo.

$$R^k{}_i = \ln\left(\frac{FR^k{}_i}{FR^k{}_{i-1}}\right), \quad \text{con k=1,2 y i=2,…,n}$$

2.- Calcular la media de los N=n-1 rendimientos.

$$\overline{R}^{k} = \frac{\sum_{i=1}^{N} R^{k}{}_{i}}{N}, \qquad \text{con k=1,2}$$

3.- La covarianza de los rendimientos de los dos factores de riesgo es:

$$\sigma_{12} = Cov\left(R^1, R^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(R^1{}_i - \overline{R}^1\right)\left(R^2{}_i - \overline{R}^2\right)}{N}$$

La función de Excel que permite calcular la covarianza esta dado por:

=COVAR($(R^1{}_1, R^1{}_2, .., R^1{}_N), (R^2{}_1, R^2{}_2, .., R^2{}_N)$)

Cuando $\overline{R}^1 = 0$ y $\overline{R}^2 = 0$, tenemos una forma más sencilla de calcular la covarianza.

$$\sigma_{12} = Cov\left(R^1, R^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} R^1{}_i R^2{}_i}{N}$$

Se puede calcular en Excel.

$\sum_{i=1}^{N} R^1{}_i R^2{}_i$ = SUMAPRODUCTO ($(R^1{}_1, R^1{}_2, .., R^1{}_N), (R^2{}_1, R^2{}_2, .., R^2{}_N)$)

Correlación de dos factores de riesgo

Debido a la dificultad para interpretar la magnitud de la covarianza, suele utilizarse la correlación para medir el grado del movimiento conjunto entre dos variables o la relación lineal entre ambas.

La correlación es una medida de la asociación lineal entre dos variables. La correlación fue utilizada por primera vez por Galton, aunque su discípulo Pearson (1857-1936) fue quien estudió en profundidad sus propiedades.

La correlación mide la relación lineal entre dos variables y su sentido (si es directo o inverso). Cuando la relación es perfectamente lineal dicho coeficiente vale 1 ó -1. Cuando el coeficiente tiene un valor próximo a cero, no existe relación entre las variables analizadas o bien dicha relación no es lineal. En general, la correlación se encuentra entre -1 y +1.

La correlación (coeficiente de correlación) de los rendimientos de los factores de riesgo $FR^1 \text{ y } \mathrm{FR}^2$, se calcula con la expresión siguiente:

$$\rho_{12} = Corr(R^1, R^2) = \frac{Cov(R^1, R^2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Donde:

$\sigma_{12} = Cov\left(R^1, R^2\right)$ Es la covarianza entre factores de riesgo FR^1 y FR^2.

$\sigma_1 =$ Es la volatilidad diaria de los rendimientos del factor del riesgo C.

$\sigma_2 =$ Es la volatilidad diaria de los rendimientos del factor de riesgo FR^2.

La función de Excel que permite calcular el coeficiente de correlación, cuando las medias de los rendimientos son diferentes de cero.

=COEF.DE.CORREL($(R^1{}_1, R^1{}_2, .., R^1{}_N), (R^2{}_1, R^2{}_2, .., R^2{}_N)$)

Si el coeficiente de correlación es positivo significa que las dos variables se mueven en el mismo sentido, es decir, que si un instrumento sube el otro subirá también, mientras más cercano a la unidad, mayor será el grado de dependencia.

En general: $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$

Si el coeficiente de correlación es negativo indica que los factores de riesgo se mueven en direcciones opuestas, mientras más cercano a cero sea el coeficiente de correlación, mayor será su grado de independencia.

Matriz de Varianza-Covarianza

Esta matriz es de mucha utilidad y aplicación práctica en:

- Teoría de portafolios.
- Medición de riesgos.

La diagonal de la matriz está formada por las varianzas de los rendimientos de los factores de riesgos y los elementos de fuera de la diagonal por las covarianzas de los rendimientos de los factores de riesgo:

Primer caso: Matriz de varianza-covarianza de los rendimientos de dos factores de riesgo.

Sean $FR^1 = \{FR^1{}_1, FR^1{}_2, ..., FR^1{}_n\}$ Y $FR^2 = \{FR^2{}_1, FR^2{}_2, ..., FR^2{}_n\}$ las observaciones históricas de los dos factores de riesgo.

Sabemos que:

$$\sigma_{12} = Cov\left(R^1, R^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(R^1{}_i - \overline{R}^1\right)\left(R^2{}_i - \overline{R}^2\right)}{N}$$

Y cuando $\overline{R}^1 = 0$ y $\overline{R}^2 = 0$

$$\sigma_{12} = Cov\left(R^1, R^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} R^1{}_i R^2{}_i}{N}$$

En ambos casos, la matriz de Varianza-Covarianza de los factores de riesgo FR^1 y FR^2 está dada por:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1{}^2 & Cov(R^1, R^2) \\ Cov(R^1, R^2) & \sigma_2{}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1{}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2{}^2 \end{vmatrix}$$

Como se puede observar, para calcular la matriz, basta calcular las covarianzas de los rendimientos de los dos factores de riesgo.

Segundo caso: Cuando se quiere calcular la matriz de Varianza-Covarianza de 3 factores de riesgo, la matriz se representa por:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^{\ 2} & Cov(R^1, R^2) & Cov(R^1, R^3) \\ Cov(R^1, R^2) & \sigma_2^{\ 2} & Cov(R^2, R^3) \\ Cov(R^1, R^3) & Cov(R^2, R^3) & \sigma_3^{\ 2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1^{\ 2} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^{\ 2} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^{\ 2} \end{vmatrix}$$

La matriz puede crecer tanto como se agreguen factores de riesgo. Es decir, puede ser de dimensión KxK, con K igual al número de factores de riesgo.

Matriz de Correlación

La matriz de correlación está dada por:

$$\rho = \begin{vmatrix} Corr(R^1, R^1) & Corr(R^1, R^2) & Corr(R^1, R^3) \\ Corr(R^1, R^2) & Corr(R^2, R^2) & Corr(R^2, R^3) \\ Corr(R^1, R^3) & Corr(R^2, R^3) & Corr(R^3, R^3) \end{vmatrix}$$

Es decir:

$$\rho = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

Donde:

$$\rho_{ij} = Corr(R^i \ , R^j) = \frac{Cov(R^i, R^j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

i=1,2,3 y j=1,2,3

Cuando i=j

$$\rho_{ii} = Corr(R^i, R^j) = \frac{Cov(R^i, R^i)}{\sigma_i \sigma_i} = \frac{\sigma_{ii}}{\sigma_i \sigma_i} = 1$$

Ejercicios y tarea.

Ver el archivo FACTORES DE RIESGO.xls, para ejemplos de cálculos de clase.

Tarea 1: Con el mismo archivo elaborar:

- Las estadísticas de media, varianza y volatilidad de cada factor de riesgo de todas las emisoras accionarias (Pestaña FRACCIONES).
- La matriz de varianza – covarianza y matriz de correlación con los factores de riesgo de todas las emisoras accionarias (Pestaña FRACCIONES).

Tarea 2: Con el mismo archivo elaborar:

- Las estadísticas de media, varianza y volatilidad de cada factor de riesgo de los factores de riesgo siguientes:
- La matriz de varianza – covarianza y matriz de correlación de los factores de riesgo siguientes:

- GMODELO
- AMX L
- CEMEX CPO
- CME
- Cete_28

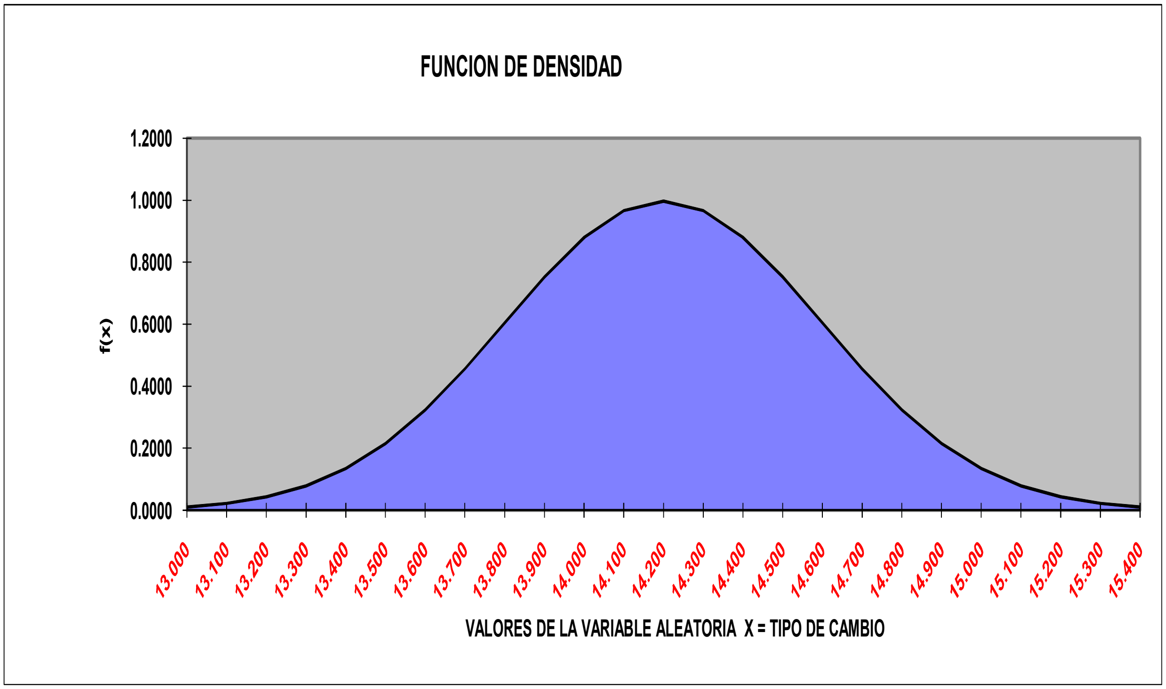
Nota: Lo que deben enviar como resultado son las matrices elaboradas, los cálculos en renglones ocultos.

Distribución de Probabilidad Normal

Diversos modelos que se utilizan para estimar el Valor en Riesgo (VaR) principalmente de mercado suponen que la distribución de probabilidad de los rendimientos de los factores de riesgo es una normal, lo que simplifica el análisis, ya que con sólo dos parámetros (media y volatilidad) se pueden explicar las características de la distribución de probabilidad de los rendimientos de los factores de riesgo.

La justificación de utilizar el supuesto de normalidad la cual se basa en el principio de que conforme se incrementa el número de observaciones las diferentes distribuciones de probabilidad convergen a la distribución normal (Teorema del límite central).

La gráfica de una función de densidad normal está dada por:



Las principales características de la distribución normal son las siguientes:

- La curva tiene un solo pico lo cual indica que es unimodal (que tiene una sola moda). Presenta una forma de campana.
- La media de un factor de riesgo se encuentra en el centro de la curva normal.
- A causa de la simetría de la distribución normal de probabilidad la mediana, la moda y la media de la distribución se hallan en el centro, por lo tanto, en una curva normal, la media, mediana y moda tienen un mismo valor.
- Las dos colas (extremas) de una distribución de probabilidad se extienden de manera indefinida y nunca tocan el eje horizontal.

Definición: Una variable aleatoria R, tienen una distribución de probabilidad normal, si y solamente si, su función de densidad es.

$$f(r) = \frac{e^{-(r-u)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Donde:

$$\sigma > 0, -\infty < r < \infty, \pi = 3.1416$$

$$u = E(R) \text{ y } \sigma^2 = \mathrm{V(R)}$$

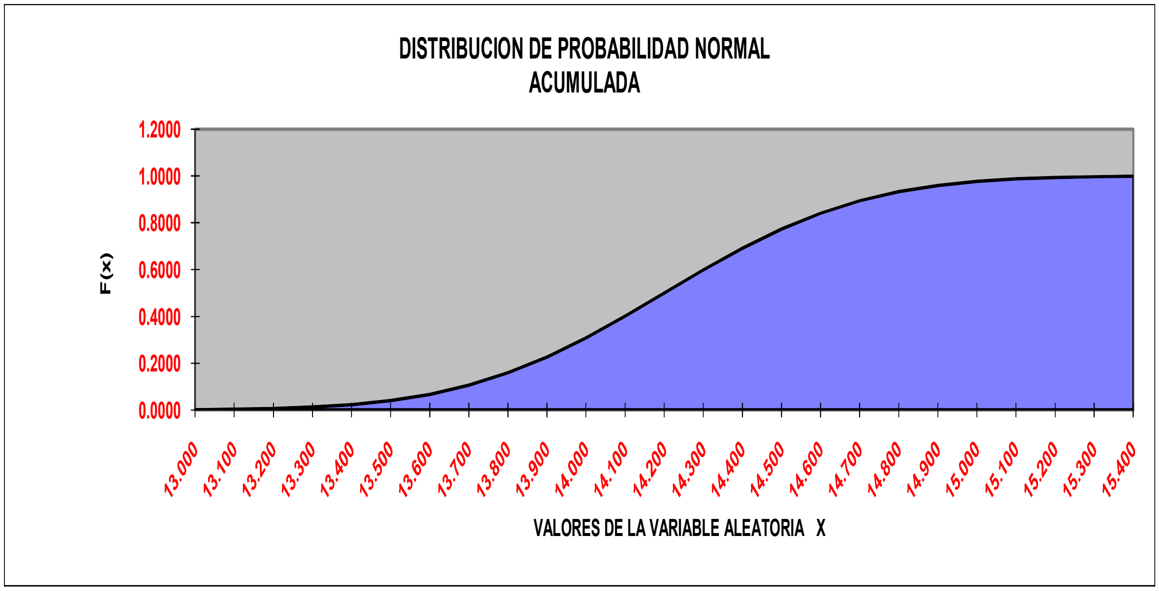
Cuando decimos que la variable aleatoria R tiene una distribución normal con $u = E(R) \text{ y } \sigma^2 = \mathrm{V(R)}$, esta se representa mediante la notación siguiente.

$$R \propto \mathrm{N}(\mathrm{u}, \sigma^2)$$

La función de distribución acumulada, cuando $R \propto \mathrm{N}(\mathrm{u}, \sigma^2)$ esta dada por:

$$F(R) = P(R \leq r) = \int_{-\infty}^{r} f(t)dt = \int_{-\infty}^{r} \frac{e^{-(t-u)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$$

Esta expresión representa el área bajo la curva gaussiana (normal)



Características.

$\bar{R} \pm \sigma$ incluye el 68.26 % de las observaciones.

$\bar{R} \pm 2\sigma$ incluye el 95.44% de las observaciones.

$\bar{R} \pm 3\sigma$ incluye el 99.73 % de las observaciones.

Distribución normal estándar

Se define como aquella que tiene una media igual a cero y una desviación estándar de uno.

Si $R \propto \mathrm{N}(\mathrm{u}, \sigma^2)$ y $u = 0 \text{ y } \sigma^2 = 1$, entonces se tiene la distribución normal estándar y se representa como:

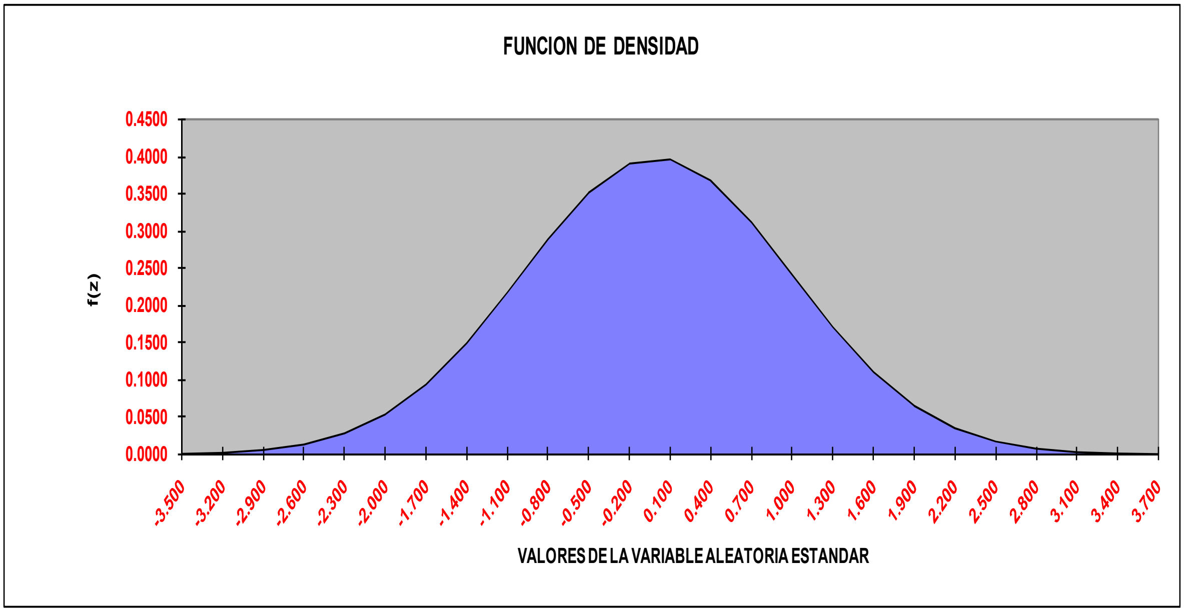
$$Z \propto \mathrm{N}(0,1)$$

Su función de densidad está dada por:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$, con $-\infty < z < \infty$

Nota: Por convención, cuando se utiliza la distribución normal estándar, se emplea la letra “Z”, en lugar de “R”.

La grafica de la función de densidad es:



Obtención de la distribución normal típica

Sea $R \propto \mathrm{N}(\mathrm{u},\sigma^2)$, entonces para transformar la distribución normal a una estandarizada se debe realizar la siguiente transformación.

$$Z = \frac{R - \mu}{\sigma}$$

Así, la función de distribución normal acumulada, cuando $Z \propto \mathrm{N}(0,1)$ es:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt$$

Calcular la integral, con las técnica normales de integración es imposible y no existe una solución exacta, por lo que su evaluación solamente se puede obtener utilizando métodos numéricos y para tal efecto la mayor parte de los libros de estadística tienen ya elaboradas tablas que permiten calcular las probabilidades de la forma $P(Z \leq z)$
En especial Excel tiene ya programada una función y esta es:

$$P(Z \leq z) = DISTR.NORM.ESTAN(z)$$

Para más detalle de los cálculos ver la siguiente información:

- TABLASNORMAL.xls
- FUNCIONNORMAL.xls

Se tiene también el problema de calcular el valor de z dada un nivel de probabilidad, es decir.

Si $P(Z \leq z) = 0.95$, se tiene la necesidad de calcular el valor de z.
Lo anterior se puede hacer directamente en Excel, con la siguiente función.

$$z = DISTR.NORM.ESTAN.INV(1-\frac{\alpha}{2})$$

SI P(Z<z)=0.95, ENTONCES, z= **DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.95)**				**1.6449**
SI P(Z<z)=0.975, ENTONCES, z= **DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.975)**				**1.9600**